

Devoir maison de mathématiques

1 Exercice :

1.1 Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation $(E') : Z^2 + Z + 1 = 0$.

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ deux solutions dans \mathbb{C}

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $(E') : Z^2 + Z + 1 = 0$ est donc :

$$S = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

1.2 Soit Z_1 la solution de l'équation (E') dont la partie imaginaire est positive

1.2.1 Montrer que $Z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} \\ &= \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ &= Z_1 \end{aligned}$$

Donc $Z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

1.2.2 En déduire les solutions, dans l'ensemble des nombres complexes, de l'équation $z^2 = Z_1$.

$$z^2 = Z_1$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

1.2.3 Écrire ces solutions sous forme exponentielle.

La forme exponentielle de z est $z = \rho \times e^{i\theta}$. Déterminons ρ et θ pour les deux valeurs de z possibles (celles trouvées en réponse à la question précédente) :

Pour $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \cos \theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}[2\pi], z = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Pour $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \cos \theta = \frac{x}{\rho} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}[2\pi], z = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

1.3 Soit Z_2 l'autre solution de l'équation (E').

1.3.1 Déterminer le module et un argument de Z_2 .

On procède de la même manière qu'à la question précédente : on exprime Z_2 sous la forme $Z_2 = \rho \times e^{i\theta}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \cos \theta = \frac{x}{\rho} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}[2\pi], Z_2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

1.3.2 Montrer que si z est solution, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, de l'équation $z^2 = Z_2$, alors le module de z égale 1.

Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux à 2π près. On s'intéresse aux modules, on peut donc écrire l'équation suivante :

$$\begin{aligned} |z^2| &= |Z_2| \\ \Leftrightarrow |z^2| &= 1 \\ \Leftrightarrow |z|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow |z| &= 1 \text{ ou } |z| = -1 \end{aligned}$$

Or un module, par sa définition, est toujours positif. La seconde solution, $|z| = -1$ est donc impossible. On a donc démontré que toute solution z de l'équation $z^2 = Z_2$ a pour module $|z| = 1$.

1.3.3 On pose $z = e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel de l'intervalle $] - \pi; \pi]$. Déterminer les deux valeurs de θ telles que $z^2 = Z_2$.

On part de la même constatation qu'à la question précédente : deux complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux à 2π près. Cette fois, on s'intéresse aux modules de ces deux complexes en utilisant la formule de De Moivre :

$$z^2 = Z_2[2\pi]$$

1.3.4 En déduire les formes algébriques des solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation $z^2 = Z_2$.

1.4 Donner les solutions, dans l'ensemble des nombres complexes, de l'équation (E).

1.5 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 6 cm.

1.5.1 Construire les points A, B, C , et D d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_C = \overline{z_B}$ et $z_D = \overline{z_A}$.

1.6 Interprétation des résultats graphiques

1.6.1 Calculer $\frac{z_D}{z_A}$. En déduire une rotation R de centre O qui transforme A en D .

$$\begin{aligned} \frac{z_D}{z_A} &= \frac{\overline{z_A}}{z_A} \\ &= \frac{\overline{z_A}^2}{z_A \times \overline{z_A}} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - xyi}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \\ &= -\frac{1}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Exprimons z_A et z_D sous leur forme trigonométrique pour trouver leur argument.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{z_A} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \cos \theta_{z_A} = \frac{x}{\rho_{z_A}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_{z_A} = \frac{y}{\rho_{z_A}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{z_A} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{z_D} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \cos \theta_{z_D} = \frac{x}{\rho_{z_D}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_{z_D} = \frac{y}{\rho_{z_D}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{z_D} = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Pour passer de z_A à z_D , comme ces deux complexes ont le même module, il suffit de transformer leur argument. C'est le rôle d'une rotation. En tournant de $-\frac{2\pi}{3}$ radians le point A par rapport à O , on obtient le point D .

1.6.2 Quelle est l'image F du point B par la rotation R ?

Déterminons le module et l'argument de B :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{z_B} = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \cos \theta_{z_B} = \frac{x}{\rho_{z_B}} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_{z_B} = \frac{y}{\rho_{z_B}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_{z_B} = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Si on ajoute $-\frac{2\pi}{3}$ radians à l'argument de z_B , on trouve un complexe défini par $z_F = \rho \times e^{i\theta}$ avec $\rho = 1$ (ne change pas) et $\theta = \theta_{z_B} - \frac{2\pi}{3} = 0 [2\pi]$, c'est à dire le point de coordonnées $(1, 0)$.

1.6.3 De quel point B est il l'image par la rotation R ?

Le point B est l'image d'un point ayant un argument supérieur de $\frac{2\pi}{3}$ au sien et de même module. L'affixe du point antécédent est donc $z_G = \rho \times e^{i\theta}$ avec $\rho = \rho_B = 1$ et $\theta = \theta_B + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3}$.

1.7 Quelle est la nature de chacun des quadrilatères $ABOF$ et $ABCD$?

Bonne question...